## TEMA 1: Operacije sa matricama i matrične jednačine

1. a) Naći $(C-A)^{-1}$ ako je $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 4 & 5\end{bmatrix}$

   b) Riješiti matričnu jednačinu $C(X-B)=AX+E$, ako je $B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -2\end{bmatrix}$, a matrice A i C kao u slučaju pod (a).

2. Riješiti matričnu jednačinu $AX-2X-A=E$, ako je $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

3. Izračunati $X=(AB)^{-1}(A+C)$ ako je

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-6 & 1 & 4\\ 3 & -4 & 2\end{bmatrix} \text{ i } C=\begin{bmatrix}5 & 2\\ -1 & 0\\ 7 & 4\end{bmatrix}.$$

4. Izračunati $(AB)^{-1}-(2E-B)^2$ ako je $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 5\\ 2 & 3 & 1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 5\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$.

5. Riješiti matričnu jednačinu $(A-BX)(X-B)^{-1}=2E$, ako je $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}-3 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$.

6. Riješiti matričnu jednačinu $A-(2X+E)B=0$, ako je $A=\begin{bmatrix}6 & -5 & 1\\ 0 & 3 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix}4 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ -4 & 2 & -1\end{bmatrix}$.

7. Ako je $A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 5 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$ i X +B regularna matrica, riješiti matričnu jednačinu $(X+B)^{-1}=(C-A)^{-1}B$.

8. a) Riješiti matričnu jednačinu $XA=X+\frac{1}{2}B$.

   b) Ako je $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$, odrediti $(A-2E)^{-1}$.

   c) Ako je $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\\ 2 & 0\end{bmatrix}$, a $B=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$, odrediti proizvod $AB$.

9. a) Riješiti matričnu jednačinu $AX-A=2X+E$ gdje je $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

   b) Da li su matrice $\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix}-3 & 1 & 2\\ -2 & 2 & -4\\ 3 & -1 & 2\end{bmatrix}$ komutativne?

## Tema 2: Sistemi linearnih jednačina i vektori

1. Determinantnim kriterijumom dokazati da vektori $a_1=(1,2,2,2)$, $a_2=(-2,1,0,-1)$, $a_3=(0,2,-2,2)$ i $a_4=(3,-1,1,2)$ obrazuju bazu prostora $R^4$. Vektor $b=(-8,11,-7,2)$ predstaviti preko vektora $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ primjenom Kroneker-Kapelijeve teoreme. Izvršiti provjeru. Koliko ima tih predstavljanja i zašto?

2. Riješiti sistem linearnih nejednačina $\begin{aligned} x+2y-6 &\le 0 \\ x &\ge 0 \\ x-y &\le 0 \end{aligned}$. Ako sistemu dodamo nejednačinu $y \le a$, diskutovati novi sistem u zavisnosti od parametra *a*.

3. Vektor $x=(a-1,2a,-a)$ izraziti preko vektora $x_1=(1,1,1)$, $x_2=(1,a+1,1)$ i $x_3=(1,1,a)$ kada je to moguće, i provjeriti. Uraditi diskusiju u svim mogućim slučajevima.

4. Odrediti vrijednost realnog parametra *a* tako da se vektor $x=(1,0,1)$ može predstaviti kao linearna kombinacija vektora $a_1=(1,2,a)$, $a_2=(2,3,1)$ i $a_3=(2,1,-1)$, a da pritom vektori $a_1, a_2$ i $a_3$ čine bazu vektorskog prostora. U tom slučaju, predstaviti vektor *x* preko datih vektora.

5. Za koju vrijednost parametra $a$ vektor $x=(2,7,5)$ se može izraziti kao linearna kombinacija vektora $x_1=(1,2,-1)$, $x_2=(2,6,0)$ i $x_3=(3,7,a-4)$. Obrazložiti svaki od slučajeva, a u svakom slučaju kada je predstavljanje moguće, vektor $x$ izraziti kao njihovu linearnu kombinaciju.

6. U zavisnoti od parametra a, diskutovati i naći rješenja sledećeg sistema linearnih jednačina:
$$\begin{aligned} x_1+4x_2+5x_3-2x_4 &= 6 \\ 2x_1+ax_2+2x_3+2x_4 &= 3 \\ 2x_1+\quad -6x_3+8x_4 &= 1 \end{aligned}$$

7. Za koje vrijednosti parametra *a* se vektor $x=(2,5,a)$ može izraziti kao linearna kombinacija vektora $x_1=(1,2,8), x_2=(1,5,2), x_3=(2,8,5)$. U svakom slučaju kada je to predstavljanje moguće, vektor *x* prikazati kao linearnu kombinaciju vektora $x_1, x_2, x_3$. Da li vektori $x_1, x_2, x_3$ predstavljaju bazu vektorskog prostora $R^3$?

8. Odrediti parametar *a* tako da matrica $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a+1 & 5 & 11 & 2 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ ima najmanji rang. Koliki je njen rang za ostale vrijednosti parametra *a*?

9. Pokazati da se vektor $x=(-1,1,1)$ može predstaviti preko vektora $x_1=(1,0,-2)$, $x_2=(-2,-1,-2)$ i $x_3=(1,0,2)$. Na koliko načina je moguće predstavljanje? Izvršiti provjeru.

10. Riješiti sistem koristeći Kramerove formule
$$\begin{aligned} x-y+2z &= 2 \\ x+y \qquad &= 0 \\ x \qquad -z &= 3 \end{aligned}$$
U slučaju saglasnosti, izvršiti provjeru.

## Tema 3: Sistemi linearnih nejednačina

1. Naći sistem nejednačina čije je rješenje paralelogram čija su tri tjemena A(2,8), B(-1,-4) i C(3,0). Dijagonala paralelograma je duž AC.

2. Naći sistem nejednačina čije je rješenje jednakokraki trapez, a čija su tri tjemena A(1,0), B(6,0) i C(3,2). Napomena: Osnovica trapeza je duž AB.

3. Riješiti sistem linearnih nejednačina: $7y - x - 10 \geq 0$, $-7y + 5x + 22 \geq 0$ i $x - 4 \leq 0$. Ako dobijenom rješenju dodamo nejednačinu $3x + y - a \geq 0$ diskutovati novi sistem u zavisnosti od parametra $a$.

4. Riješiti sistem linearnih nejednačina: $y - 2x \leq 0$, $2x - 3y - 4 \leq 0$ $i$ $y + 2x - 4 \leq 0$. Ako dobijenom rješenju dodamo nejednačinu $y - 2x - a \leq 0$ diskutovati novi sistem u zavisnosti od parametra $a$.

5. Riješiti sistem linearnih nejednačina: $x \leq y + 2$, $5x + y \leq 10$ i $6 \geq 2y - 3x$. Ako dobijenom rješenju dodamo nejednačinu $a - x \geq 0$ diskutovati novi sistem u zavisnosti od parametra $a$.

6. Odrediti sistem linearnih nejednačina čije rješenje predstavlja skup tačaka trougla ABC, A(0,0), B(4,1) i C(1,4). Ako dobijenom sistemu dodamo nejednačinu $x - y \geq a$, diskutovati novi sistem u zavisnosti od parametra $a$. Dokazati da je dati trougao konveksan skup.

7. U zavisnosti od parametra $a$ diskutovati i riješiti sistem linearnih nejednačina

$$\begin{aligned} y - 2x &\leq 2 \\ y + x &\leq 2 \\ y &\geq -2 \\ x &\leq a \end{aligned}$$

8. Odrediti sistem linearnih nejednačina čije je rješenje trougao ABC, koji je nastao na presjeku pravih $x = 2$, $y = -x$ i prave koja prolazi kroz tačke (1,3) i (2,6). Ako tom sistemu dodamo nejednačinu $x \geq a$ diskutovati novi sistem.

9. Grafički odrediti skup rješenja nejednačine $x - 3y - 8 \leq 0$.

10. a) U ravni predstaviti oblasti tačaka koje zadovoljavaju sistem linearnih nejednačina

$$\begin{aligned} y + x &\leq 5 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

b) Ako tom sistemu dodamo nejednačinu $x \leq a$ diskutovati novi sistem.

11. a) Odrediti sistem linearnih nejednačina čije je rješenje četvorougao ABCD, A(-2,-1), B(4,5), C(3,6), D(0,3).
b) Ako dobijenom sistemu dodamo nejednačinu $x \leq a$ diskutovati novi sistem u zavisnosti od parametra $a$.